2023

ইন্টিগ্রেশন db

2022

সিনিয়র ক্যাটাগরি

Organized By	Media Partner	Promotional Partner
ট্যকিয়ন	সৃষ্টিতে তত্ত্বে	গণিতযজ্ঞ

নির্দেশনা

- এটি ইন্টিগ্রেশন বি ২০২৩ এর সিনিয়র ক্যাটাগরির (স্নাতক ২০২১-২২ ও স্নাতক ২০২২-২৩ সেশন) প্রশ্ন। নিম্নে ছয়টি প্রশ্ন দেওয়া আছে। সময় ৫ ঘন্টা। পরীক্ষা চলবে দুপুর ৩টা থেকে রাত ৮টা পর্যন্ত। সময় শেষ হওয়ার পর উত্তর সাবমিট করার জন্য সর্বোচ্চ ৫ মিনিট সময় পাবেন! এরপর সাবমিট করলে তা গ্রহণযোগ্য হবে না।
- উত্তর সমাধান করে উত্তরপত্রের উপরে টিমের নাম লিখে উত্তরপত্র পিডিএফ বা ছবি আকারে একটি ইমেইল হিসেবে editortachyon@gmail.com এ পাঠিয়ে দিবেন।
- পরীক্ষা চলাকালীন দলগতভাবে প্রশ্ন সমাধান করা যাবে। পরীক্ষার জন্য ইন্টারনেট ব্যবহার করা যাবে ও বই দেখে পরীক্ষা দেওয়া যাবে। তবে কোনো ফোরাম বা কোনো শিক্ষককে জিজ্ঞেস করা যাবে না। আমাদের কোনো প্রকার প্রশ্ন থাকলে আমরা যোগাযোগ করব এবং উত্তরের সন্তোষজনক ব্যাখ্যা তখন দিতে না পারলে ধরে নিব এটি তারা বুঝে নি।
- চ্যাটজিপিটি ব্যবহার করে অধিকাংশ সময় সঠিক উত্তর পাওয়া যায় না এবং চ্যাটজিপিটি থেকে কপি করা উত্তরের প্রসেস দেখে বোঝা যায় এটি চ্যাটজিপিটি থেকে কপি করা হয়েছে কি না! এমন করে সঠিক উত্তর পাওয়া যাবে না বিধায় অইসব করে সময় নষ্ট না করার অনুরোধ রইল।
- যে-কোনো সমস্যা হলে বা কোনো প্রশ্ন থাকলে আমাদেরকে উক্ত ঠিকানায় ইমেইল করতে পারেন বা আমাদের ফেইসবুক পেইজে ইনবক্স করতে পারেন। আমাদের পেইজের লিংক https://www.facebook.com/TachyonTs]

সমস্যা ১ [মান ২]

নিম্নে প্রদত্ত সমাকলনটির মান কত? এখানে $i = \sqrt{-1}$ তবে θ জটিল সংখ্যার[1] আর্গুমেন্ট বুঝাচ্ছে না, বরং একটি চলক বুঝাচ্ছে।

$$\int_0^{2\pi} |ie^{-i\theta} + e^{2i\theta} - e^{-3i\theta} - ie^{i\theta} + e^{-2i\theta} - e^{3i\theta}| d\theta$$

Problem 1 [Marks 2]

What is the value of the integral below? Here the symbol $i = \sqrt{-1}$ and θ is a variable and not the argument of any complex number[1].

$$\int_0^{2\pi} |ie^{-i\theta} + e^{2i\theta} - e^{-3i\theta} - ie^{i\theta} + e^{-2i\theta} - e^{3i\theta}| d\theta$$

সমস্যা ২ [মান ৪]

t ও x অক্ষ একে অপরের উপর সমপাতিত হলেও s ও y অক্ষের মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 30°$ যেখানে $\theta + \hat{a}_x \cdot \hat{a}_s = 90°$। $\hat{a}_x$ ও $\hat{a}_s$ যথাক্রমে x ও s অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর। s-t তলে নিম্নে উল্লেখিত সমীকরণ অংকন করা হলে $x = 2$ ও $x = 3$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

$$s = \frac{t^3}{1 + t^2}$$

Problem 2 [Marks 4]

t axis and x axis overlapped onto each other but $\theta = 30°$ is the angle between s axis and y axis where $\theta + \hat{a}_x \cdot \hat{a}_s = 90°$. $\hat{a}_x$ and $\hat{a}_s$ are the unit vectors of the x axis and s axis respectively. If the equation below is drawn in the s-t plane then determine the area bound by $x = 2$ and $x = 3$.

$$s = \frac{t^3}{1 + t^2}$$

[1] To know more about complex numbers https://math.mit.edu/~stoopn/18.031/complexnumbers.pdf

সমস্যা ৩ [মান ৬]

$x = 1$ এবং $n \to \infty$ এর জন্য প্রমাণ করো যে:

$$\lambda(x) = \left[\frac{n^n(x+n)(x+\frac{n}{2})(x+\frac{n}{3})\dots(x+1)}{n!(x^2+n^2)(x^2+\frac{n^2}{4})\dots(x^2+1)}\right] = \frac{2e}{\sqrt{e^\pi}}$$

Problem 3 [Marks 6]

For $x = 1$ and $n \to \infty$ prove that:

$$\lambda(x) = \left[\frac{n^n(x+n)(x+\frac{n}{2})(x+\frac{n}{3})\dots(x+1)}{n!(x^2+n^2)(x^2+\frac{n^2}{4})\dots(x^2+1)}\right] = \frac{2e}{\sqrt{e^\pi}}$$

সমস্যা ৪ [মান ৮]

তোমার কাছে 1000π RPM (Revolutions per minute) গতির একটা মোটর আছে যেটা ব্যবহার করে তোমাকে 15 তলায় (অর্থাৎ 14 তলার ছাদে) 100 kg ভর তুলতে হবে। প্রতি কেজি ভরের জন্য মোটরের গতি 2π RPM (Revolutions per minute) করে কমে যায়। প্রত্যেক তলার উচ্চতা 4π মিটার। প্রতি 2.34 মিনিট পরপর উপরে একজন শ্রমিক মালামাল সংগ্রহ করেন। মোটরের সাথে $r_1 = \frac{50}{\pi}\ cm$ ব্যাসার্ধের একটা চাকা w_1 যুক্ত আছে। মোটরের সাথে আরেকটা চাকা w_2 আলাদা বেল্টের মাধ্যমে যুক্ত করে দেওয়া আছে। w_1 চাকার পরিধির সমীকরণ $x^2+y^2=r_1^2$।

(ক) প্রমাণ করো যে, w_2 চাকার ব্যাসার্ধ $r_2 = \frac{r_1}{5\%}$ হবে।

(খ) দ্বিতীয় চাকা যদি প্রথমটির $5m$ বামে এবং $3m$ নিচে থাকে, তাহলে তার সমীকরণ নির্ণয় করে যোগজের মাধ্যমে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

Problem 4 [Marks 8]

You have a motor of velocity 1000π RPM (Revolutions per minute) with which you have to pull a 100 kg weight to the 15^{th} Flood (i.e., at the roof of the 14^{th} Floor). Adding 1 kg to the motor decreased the velocity by 2π RPM (Revolutions per minute). The height of every floor is 4π meter. After each 2.34 minutes, a worker collects weights from the motor. A wheel w_1

of $r_1 = \frac{50}{\pi}\ cm$ radius is attached to the motor. Another wheel w_2 is also attached to the motor with the help of a belt. The perimeter equation of w_1 is: $x^2+y^2=r_1{}^2$.

(a) Prove that radius of w_2 is $r_2 = \frac{r_1}{5\%}$
(b) If the second wheel is to the $5m$ left and $3m$ down the first wheel then determine the equation of it and area of it using integration.

সমস্যা ৫ [মান ১০]

একটি গোলকাকার $m = 2 \times 10^5 \text{kg}$ ভর ও $d = 1$ km ব্যাস বিশিষ্ট গ্রহাণু 30 km/hour আদিবেগে পৃথিবী বায়ুমণ্ডলে প্রবেশ করে। গ্রহাণুর অবস্থানের পরিবর্তন নিম্নে উল্লেখিত সেকেন্ড অর্ডার ডিফারেনশিয়াল সমীকরণ দিয়ে প্রকাশ করা যায়:

$$\ddot{x} - 2(3\dot{x} - 10) = 0$$

বায়ুমণ্ডলে প্রবেশের 10 সেকেন্ড পর গ্রহাণুটি বঙ্গোপসাগরে আছড়ে পড়ে। গ্রহাণুটির আছড়ে পড়ার ফলে সুনামি তৈরি হতে পারে কি?

Problem 5 [Marks 10]

A spherical shaped asteroid of mass $m = 2 \times 10^5 \text{kg}$ and diameter $d = 1$ km enter the earth's atmosphere with an initial velocity of 30 km/hour. The distance profile of the asteroid inside the earth can be described by the second order differential equation given below:

$$\ddot{x} - 2(3\dot{x} - 10) = 0$$

The asteroid hits the Bay of Bengal after 10 seconds from entering into the atmosphere. Can it cause a Tsunami?

প্রশ্ন ৬ [মান ১২]

Photinus carolinus নামের এক প্রজাতির জোনাকি পোকা উত্তর আমেরিকায় পাওয়া যায়। একবার জ্বলে উঠার পর আরেকবার জ্বলে উঠার জন্য এসব জোনাকি পোকার কমপক্ষে ১২ সেকেন্ড সময় লাগে। এই সময়কে বলা হয় 'Recovery Period τ.'। যখন এসব জোনাকি পোকা একা (দল থেকে বিচ্ছিন্ন) থাকে, তখন এরা এলোমেলোভাবে আলো জ্বলে। কিন্তু যখন এরা দলবদ্ধভাবে থাকে তখন এরা এদের নিকটতম জোনাকি পোকাকে অনুসরণ করে নিজের আলো জ্বলার সময় পরিবর্তন করে। কিছুসময় চেষ্টার পর নিকটতম জোনাকি পোকা যখন আলো জ্বেলে, ঠিক ঐ সময়েই এই জোনাকি পোকাও আলো জ্বেলে [2]। কত সংখ্যার একটি দল P-এ জোনাকি পোকাগুলো আছে তা গুরুত্বপূর্ণ নয়। একটি নির্দিষ্ট সময় t পর, সকল জোনাকি পোকা একসাথে আলো জ্বলা শুরু করে। ডিফারেনশিয়াল সমীকরণ ব্যবহার করে এই ব্যবস্থার একটি মডেল তৈরি করে দেখাও যে জোনাকি পোকার একটি বড় দলের জন্য এক সময় পর এরা সবাই এক সাথে আলো জ্বালবে। (যদি সম্ভব হয় তবে) P=10,000 এর জন্য কত সময় পর এরা একই সময়ে জ্বলে উঠবে।

এই প্রজাতির একই সাথে জ্বলে উঠার এই ঘটনার ব্যাপারে আরো বিস্তারিত জানতে এই প্রবন্ধটি থেকে সাহায্য নিতে পারেন Sarfati, R., Hayes, J. C., & Peleg, O. (2021). Self-organization in natural swarms of *Photinus carolinus* synchronous fireflies. *Science Advances*, *7*(28) retrieved from https://www.science.org/doi/10.1126/sciadv.abg9259

Problem 6 [Marks 12]

Photinus carolinus is a species of fireflies found largely in North America. These fireflies take atleast 12 seconds before flashing for the second time. This time is called Recovery Period τ. When they are isolated, they flash randomly. But when they are in a group, they follow their closest firefly and try to sync their flashes with their nearby firefly.[2] It doesn't matter how much the population size P is, after a certain time t, the fireflies will flash in unison. Derive a model using differential equation to show that the fireflies will always synchronize their flashes given in a large group. For P=10,000, determine after what time they will flash in unison (if possible).

To get more information about this flash synchronization of the species, take help from this article Sarfati, R., Hayes, J. C., & Peleg, O. (2021). Self-organization in natural swarms of *Photinus carolinus* synchronous fireflies. *Science Advances*, *7*(28) retrieved from https://www.science.org/doi/10.1126/sciadv.abg9259

[2] To see the synchronization in real, watch this YouTube video https://youtu.be/ZGvtnE1Wy6U?si=kWXi7Pb6wG3Jsq3q